

Infos : Évaluation du cours ouverte sur Is-Academia

◊ Formulaire d'inscription à l'examen blanc disponible sur moodle : Deadline : **4 avril 2025**

◊ Remarque 3.14 (iii)  $\rightarrow$  c'est bien des inégalités larges  
( $\leq$ )

## §2.2 Suites dans $\mathbb{R}^n$

### Définition 2.17 (Suite)

une suite dans  $\mathbb{R}^n$  est la donnée d'une fonction  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sauf qu'on écrit  $x_k$  à la place de  $f(k)$

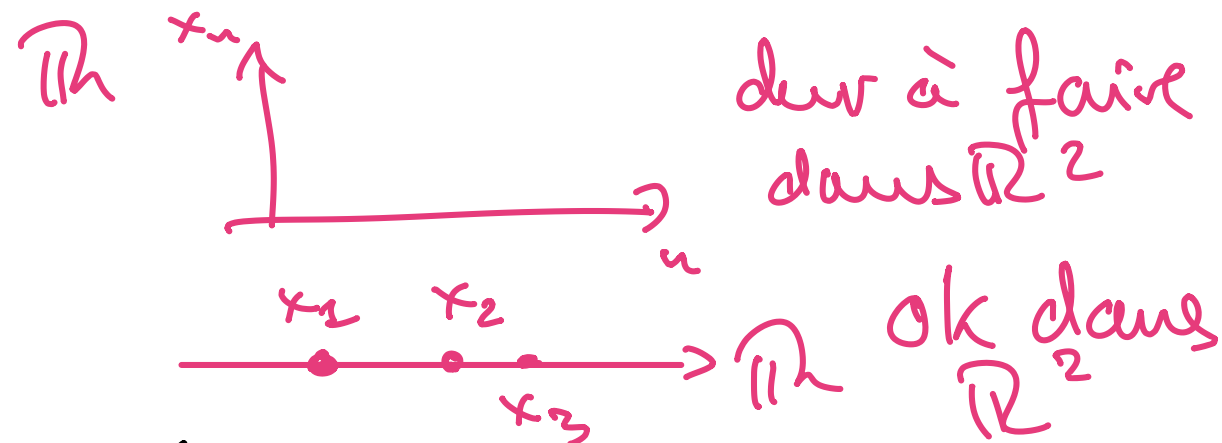
Pour décrire la suite en entier, on écrit  $(x_k)_{k \geq 0}$  ou simplement  $(x_k)$ . Des fois on fait commencer la suite à  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , auquel cas, on écrit  $(x_k)_{k \geq k_0}$

Par convention, si  $x_h \in \mathbb{R}^n$  est un élément d'une suite, on écrit  $x_h = (x_{h,1}, x_{h,2}, \dots, x_{h,n})$

$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$$

$$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$$

$\vdots$

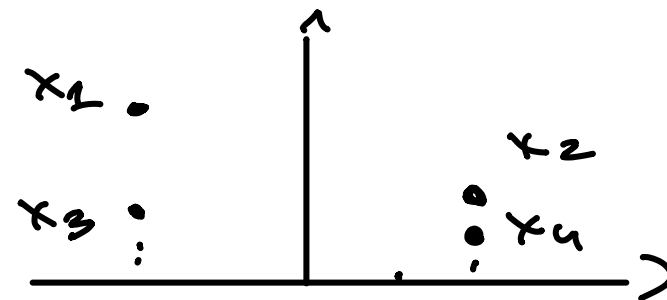


Exemple 2.18: (i)  $x_h = (\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$   $h \geq 1$ .

$$x_1 = (1, 1), x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$(ii) x_h = ((-1)^h, \frac{1}{h})$$

$$x_1 = (-1, 1), x_2 = (1, \frac{1}{2}), x_3 = (-1, \frac{1}{3}), \dots$$



## Définition 2.19 (suite convergente, suite bornée)

Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  une suite.

(i) Soit  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ . On dit que  $(x_n)$  converge vers  $l$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq K, \underbrace{\|x_n - l\|}_{d(x_n, l)} \leq \varepsilon$$

On appelle alors,  $l$  la limite de  $(x_n)$  et on note  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(ii) On dit que  $(x_n)$  converge ou est convergente si  $\exists l \in \mathbb{R}^n$  tq  $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq K, d(x_n, l) \leq \varepsilon$

(ii) On dit que  $(x_k)$  diverge ou est divergente si elle n'est pas convergente.

(iv) On dit que  $(x_k)$  est bornée, si  $\exists C \geq 0$  tq  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  
 $\|x_k\| \leq C$

Théorème 2.20 (caractérisation des suites convergentes et bornées)

Partie 1: Convergence

Soit  $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$ , une suite, et  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$  limite dans  $\mathbb{R}^n$

(ii)  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = l_i$

(iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - l\| = 0$

limites dans  $\mathbb{R}$ .

## Partie 2: bornes

Soit  $(x_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^n$  une suite. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $(x_k)$  est bornée,
- (ii)  $\forall 1 \leq i \leq n, (x_{k,i})_{k \geq 0}$  est bornée,
- (iii)  $(\|x_k\|)_{k \geq 0}$  est bornée.

### Remarque 2.21

Le théorème nous indique que pour discuter convergence ou bornes sur les suites, on peut travailler composante par composante:

Si toutes les composantes de la suite convergent, alors la suite converge. Dès qu'une composante diverge, la suite en entier diverge.

## Exemple 2.22

(i)  $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ . Chaque composante converge et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = (0, 0)$$

Remarquons également (pas nécessaire)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (0, 0)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$$

(ii) Soit  $x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ .  $x_{n,1} = (-1)^n$  qui diverge

$\Rightarrow (x_n)$  diverge.

$$\text{On a } \|x_n\| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$\Rightarrow (\|x_n\|)$  est bornée  $\Rightarrow (x_n)$  est bornée.

  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$  existe  
 ~~$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existe~~

## Théorème 2.23 (Propriétés de la limite)

Serient  $(x_k)_{k \geq 0}$  et  $(y_k)_{k \geq 0}$  deux suites convergentes,  
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors,

(i)  $(x_k)$  est bornée.

(ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\|$

(iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \beta \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$

(iv)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, y_k \rangle = \langle \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \rangle$

(v)  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, y_k) = d(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \lim_{k \rightarrow \infty} y_k)$

limites dans  $\mathbb{R}^n$

limites dans  $\mathbb{R}$ .

### Définition 2.24 : Suite de Cauchy

Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  une suite. On dit que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n, j \geq K,$

$$\|x_n - x_j\| \leq \epsilon$$

### Théorème 2.25

Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  une suite. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $(x_n)$  converge

(ii)  $(x_n)$  est de Cauchy.

(iii)  $\forall 1 \leq i \leq n, (x_{n,i})$  est de Cauchy

## Définition 2.26 (sous-suites)

Soit  $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  une suite. Une sous-suite est la donnée d'une suite d'indices  $(k_j)_{j \geq 0} \subseteq \mathbb{N}$  tq  $\forall j, k_{j+1} > k_j$ . On note alors la sous-suite  $(x_{k_j}) \subseteq (x_k)$

Remarque 2.27 (i) ⚠ confusion possible: une sous-suite (qui sont des éléments de  $\mathbb{R}^n$ ) et la suite d'une composante  $(x_{k,j})_{k \geq 0}$  (qui sont des éléments dans  $\mathbb{R}$ )

(ii)  pour les sous suites, on ne peut pas travailler composante par composante sans faire attention.

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$$

$(x_{k_j,1}) \subseteq (x_{k,1})$  une sous suite de la première comp.

&  $(x_{\tilde{k}_j,2}) \subseteq (x_{k,2})$  une autre sous-suite de la 2<sup>e</sup> comp.

$(x_{k_j,1}, x_{\tilde{k}_j,2})_j$  n'est pas nécessairement une sous-suite de  $(x_k)$ .

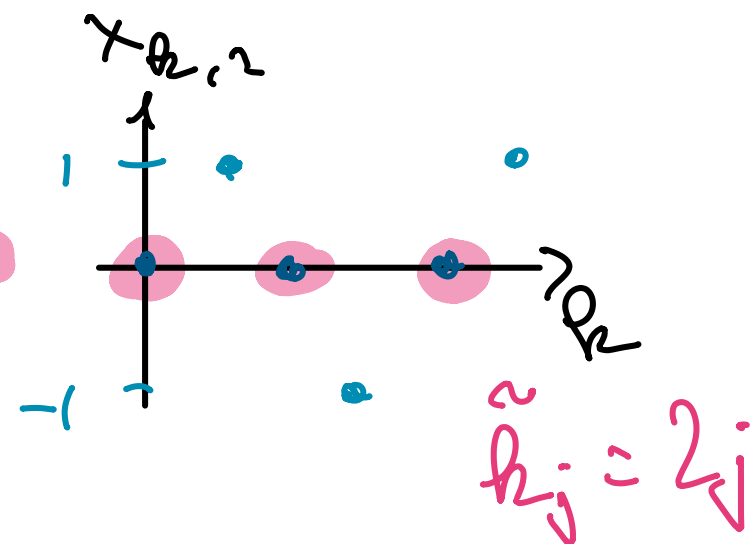
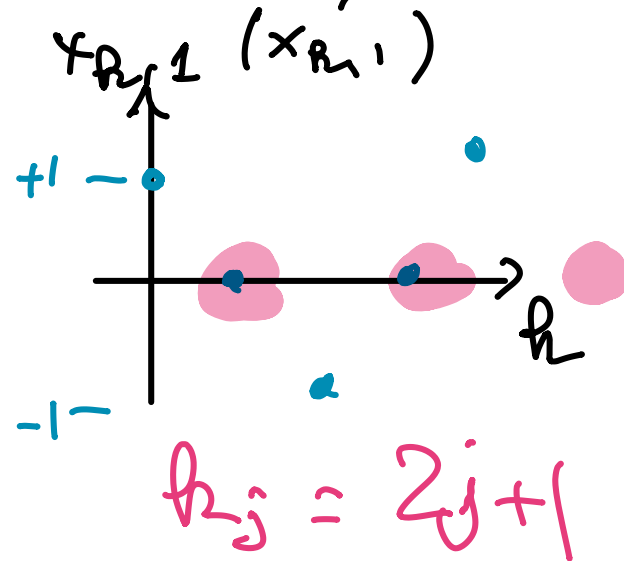
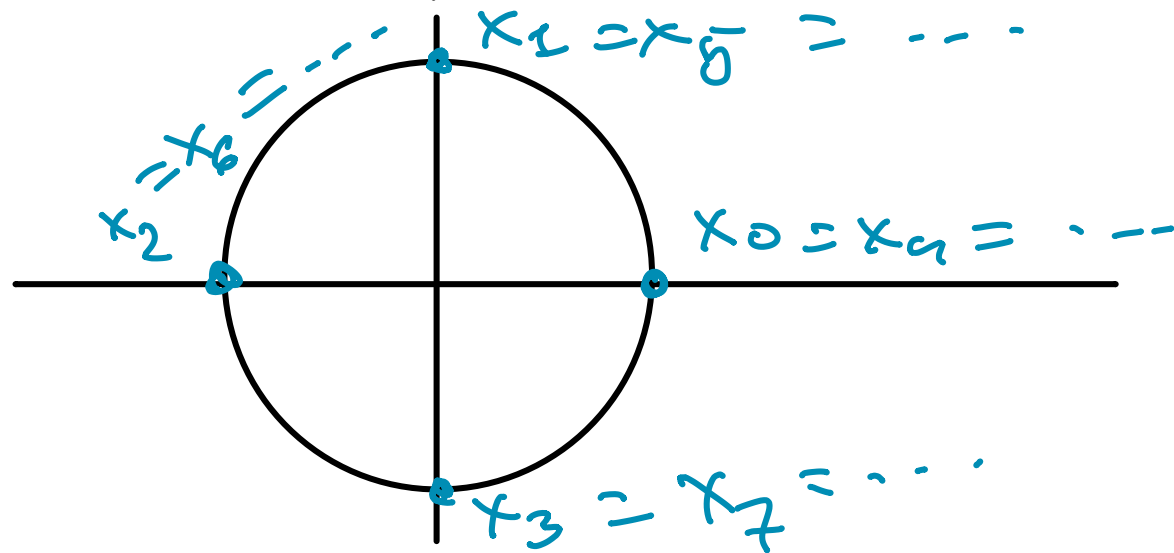
Example 2.28 : (i) Let  $x_k = ((-1)^k, \frac{1}{k})$ ,  $k \geq 1$ .

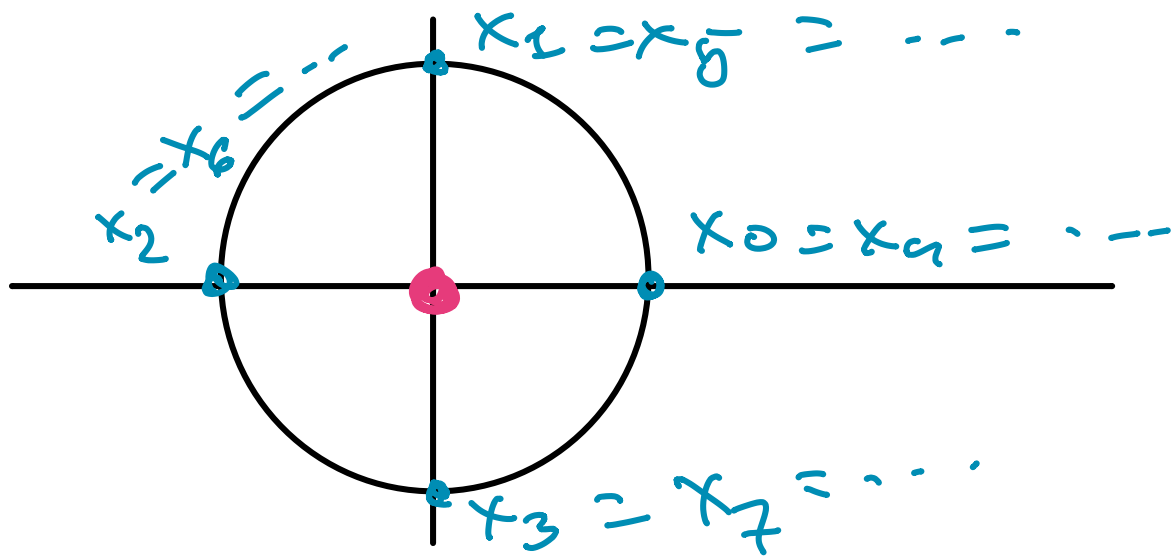
Posons  $k_j = 2j$ . Alors,  $x_{k_j} = ((-1)^{k_j}, \frac{1}{k_j}) = ((-1)^{2j}, \frac{1}{2j})$   
 $= (1, \frac{1}{2j}) \leq (x_k)$

$(x_{k_j})_{j \geq 1}$  converge!  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \left( \lim_{j \rightarrow \infty} 1, \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \right) = (1, 0)$

(ii)  $x_k = (\cos(k \cdot \pi/2), \sin(k \cdot \pi/2))$

$x_0 = (1, 0)$ ,  $x_1 = (0, 1)$ ,  $x_2 = (-1, 0)$ ,  $x_3 = (0, -1)$ ,  $x_4 = (1, 0), \dots$





$$(x_{k_j,1}, x_{\tilde{k}_j,2}) = (0,0)$$

n'est pas une sous-suite!  
 $\hookrightarrow$  vient du fait que  $k_j \neq \tilde{k}_j$

Mais, si on pose  $k_j = 4j$ . Alors,  $x_{k_j} = x_{4j} = (1,0)$   
 qui est bien une sous suite (je choisi  $k_j = 4j$  dans  
 toutes les composantes)

Théorème 2.29 (Propriétés des sous-suites)

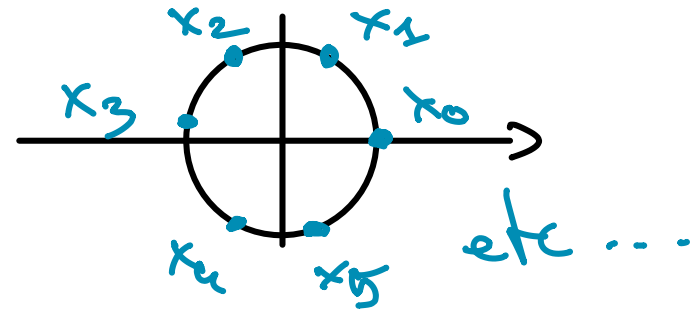
Soit  $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$  une suite. Alors,

(i) (Bolzano - Weierstraß) Si  $(x_k)$  est bornée, elle admet  
 une sous-suite convergente.

(ii) Une suite converge si et seulement si toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

### Exemple 2.31

Soit  $x_k = (\cos(k), \sin(k))$



Alors,  $(x_k)$  est bornée.

(Chaque composante l'est ou  $\|x_k\| = 1$  qui est bornée)  
 $\Rightarrow (x_k)$  admet une sous-suite convergente.

En réalité, quel que soit le point du cercle trigo, on peut trouver une sous-suite de  $(x_k)$  qui converge vers ce point)

## Théorème 2.32

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble non-vidé, et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Alors,  $x \in \overline{E}$  si et seulement si  $\exists (x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  tq

(i)  $\forall k, x_k \in E$ .      (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

Alors,  $x \in \partial E$  si et seulement si  $\exists (x_k)_{k \geq 0}, (y_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$  tq

(i)  $\forall k, x_k \in E, y_k \in \mathbb{R}^n \setminus E$ , (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$

## Exemple 2.33

Soit  $E = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  et  $(x_k) \subseteq E$  une suite convergente.  
i.e.  $\forall k, a < x_k < b \implies$  analyse 1  $a \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq b$ .

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on a quelque chose de similaire :

$$x_k \in E \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in E$$

$$\nRightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in E.$$

## § 2.3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ , courbes

Définition 2.34 (limites, continuité)

Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

(i) On dit que  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$  si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\} \subseteq D$$

(ii) Soit  $l \in \mathbb{R}^m$ , supposons que  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$ . On dit que  $l$  est la limite de  $f$  en  $x_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}, \\ \|f(x) - l\| \leq \varepsilon.$$

On note alors  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

(iii) Supposons que  $x_0 \in \mathcal{D}$  et  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

→ gauche / droite / sur des domaines → voir polycop.